Принцип максимума в оптимальном управлении

Предисловие

Настоящая книжка имеет целью изложить важнейшие результаты, входящие в книгу «Математическая теория оптимальных процессов» четырех авторов — Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, не нанося при этом ущерба полноте и точности изложения. При написании ее я старался дать наиболее простые доказательства всем излагаемым результатам. Не знаю, удалось ли мне упростить доказательства, имеющиеся в книге четырех авторов, но, во всяком случае, объем книги резко сокращен — вместо двадцати печатных листов предлагаемая книжка содержит не более трех.

В процессе написания книжки — я часто встречался с трудностями при проведении доказательств. В этих случаях мне было достаточно обратиться за помощью к Р. В. Гамкрелидзе, который безотказно и немедленно давал разумный совет, за что я ему горячо благодарен.

Выражаю также благодарность С. М. Асееву за помощь при редактировании рукописи.

3 сентября 1987 г. *Л. Понтрягин*

Глава 1. Принцип максимума, формулировка

Всюду в дальнейшем будут употребляться сокращенные обозначения для суммирования: именно, если в одночлене два раза встречается греческий индекс — один раз вверху и один раз внизу, — то одночлен этот означает сумму по всем значениям индекса. Так, например,

$$\psi_\alpha x^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n,$$

означает сумму

$$\psi_\alpha x^\alpha = \psi_0 x^0 + \psi_1 x^1 + \ldots + \psi_n x^n.$$

§1. Управляемые системы. Работа многих физических процессов и технических приборов описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых независимым переменным является время t. Осуществляется это следующим образом.

Предполагается, что состояние технического прибора в данный момент времени определяется несколькими величинами. Обозначим их через $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Величины эти называются фазовыми

Л. С. Понтрягин, М.: Наука.— 1989.

координатами прибора, а пространство R^n, в котором они являются координатами, называется фазовым пространством прибора. В соответствии с этим вектор

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{1}$$

называется фазовым вектором прибора. Оказывается, что скорость изменения каждой фазовой координаты x^i со временем, т. е. $\dfrac{dx^i}{dt} = \dot{x}^i$, определяется фазовым вектором $\mathbf{x}$, так что мы имеем

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) = f^i(x), \tag{2}$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Система уравнений (2), записанная в векторной форме (3), определяет поведение прибора в процессе изменения времени. Для того чтобы получить конкретное изменение вектора состояния $\mathbf{x}(t)$, достаточно задать начальное состояние $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ в момент времени t_0. Тогда решение $\mathbf{x}(t)$ системы (3) даст определенное поведение прибора во времени.

В качестве примера рассмотрим движение материальной точки в трехмерном евклидовом пространстве. Механическое состояние этой точки в каждый момент времени определяется шестью величинами: геометрическими координатами точки y^1, y^2, y^3 и скоростями $\dot{y}^1, \dot{y}^2, \dot{y}^3$. Совокупность y^1, y^2, y^3 объединим в один вектор $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$. Тогда совокупность скоростей $\dot{y}^1, \dot{y}^2, \dot{y}^3$ будет составлять векторную скорость $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{y}^1, \dot{y}^2, \dot{y}^3)$. Движение точки в пространстве определяется следующим уравнением:

$$m\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \tag{4}$$

Здесь m — масса точки, $\ddot{\mathbf{y}} = \dfrac{d^2\mathbf{y}}{dt^2}$ — ее ускорение, а $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ — сила, действующая на точку, которая предполагается здесь зависящей от положения $\mathbf{y}$ точки в пространстве. Для того чтобы переписать (4) в форме (2), (3), введем в рассмотрение вектор $\mathbf{z}$, состоящий из двух частей: вектора $\mathbf{z_1} = \mathbf{y}$ и вектора $\mathbf{z_2} = \dot{\mathbf{y}}$, т. е.

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}) = (\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}).$$

Тогда уравнение (4) перепишется в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = (\dot{\mathbf{z_1}}, \dot{\mathbf{z_2}}) = (\mathbf{z_2}, \frac{\mathbf{f}(\mathbf{z_1})}{m}).$$

Может случиться, что процесс изменения фазового вектора $\mathbf{x}$ в уравнении (3) зависит не только от фазового состояния $\mathbf{x}$ объекта, но также от некоторых других величин. Наиболее ярким примером может служить самолет, в котором мы следим за движением его центра тяжести, так что здесь речь идет о движении точки в пространстве. Однако в действительности движение самолета зависит от его ориентации в пространстве как твердого тела и тяги двигателя. Ориентация твердого тела в пространстве определяется тремя числами z_1, z_2, z_3, а тягу двигателя обозначим z_4. Правая часть дифференциального уравнения (4) определяется не только вектором положения $\mathbf{y}$ центра тяжести самолета, но и значениями параметров z_1, z_2, z_3, z_4. Объединяя эти параметры вместе, получаем параметр $\mathbf{u}$. Тогда уравнение (4) запишется в виде

$$m\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}).$$

Величина $\mathbf{u}$ называется управлением.

В общем случае мы можем уравнению (3) придать вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{u}$ называется управлением и определяется несколькими величинами. Предполагается, что функция $\mathbf{f}$ непрерывна по совокупности всех переменных и имеет непрерывные производные по каждому x^j.

Для того, чтобы получить определенное решение уравнения (5), нужно задать не только начальное значение $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, но также задать управление и как функцию времени $t: \ \mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. В дальнейшем будем считать, что управление $\mathbf{u}(t)$ — кусочнонепрерывная функция со значениями в r-мерном пространстве R^r, непрерывная слева в каждой точке разрыва и имеющая предел справа.

В нашем примере с самолетом величина $\mathbf{y}$ определялась в зависимости от ориентации самолета в пространстве и тяги двигателя. Утверждение, что ориентация самолета в пространстве определяется тремя числами, неточно. Ориентация твердого тела в пространстве определяется тремя числами только локально. В действительности же совокупность всех положений твердого тела в пространстве при фиксированном центре тяжести представляет собой множество, являющееся естественным образом некоторым топологическим пространством. Таким образом, в случае самолета

управление $\mathbf{u}$ не является просто числовой функцией, а принадлежит некоторому топологическому пространству Ω.

Система (5) называется управляемой системой уравнений, а $\mathbf{u}$ — ее управлением. Как правило, управление $\mathbf{u}$ принадлежит некоторому множеству Ω, которое будем считать подмножеством r-мерного евклидова пространства R^r.

§2. Задача оптимального управления. Пусть

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \Omega,$$

(см. (5)) — управляемая система, заданная в n-мерном фазовом пространстве R^n. Допустим, что существует такое управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, которое переводит фазовое состояние $\mathbf{x}_0$ в фазовое состояние $\mathbf{x}_1$. Это значит, что существуют два таких значения времени $t_0 < t_1$, что решение уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1.$$

Здесь предполагаются фиксированными только точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$, но не моменты времени t_0 и t_1.

Задача заключается в том, чтобы выбрать такое наиболее выгодное управление $\mathbf{u}(t) \in \Omega$, которое также переводит фазовую точку $\mathbf{x}_0$ в фазовую точку $\mathbf{x}_1$.

Выгодность управления $\mathbf{u}(t)$ описывается функционалом L. Управление считается наиболее выгодным, если функционал L имеет минимальное значение. В нашем случае функционал L задается в виде интеграла

$$L = \int_{t_0}^{t_1} f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))dt, \tag{6}$$

где

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f^0(x^1(t), \ldots, x^n(t), \ \mathbf{u}(t))$$

— заданная функция указанных переменных.

Важным частным случаем является тот, когда $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1$. В этом случае

$$L = t_1 - t_0,$$

т. е. наиболее выгодным управлением считается такое, которое переводит фазовое состояние $\mathbf{x}_0$ в фазовое состояние $\mathbf{x}_1$ за наименьшее время. Это задача быстродействия.

Математика обладает свойством универсальности. Именно, решая конкретную задачу, мы получаем результат, пригодный для решения многих других задач. Так, например, функционал L может оценивать количество топлива для придания космическому объекту заданной ориентации. В виде задачи оптимального управления могут быть сформулированы некоторые экономические задачи и задачи естествознания.

§3. Основной результат: «Принцип максимума». Включим фазовое пространство R^n в $n+1$-мерное пространство S^{n+1}, присоединив к координатам $x_1, \ldots, x^n$ координату x^0. Вектор пространства S^{n+1} будем обозначать

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x^0, x^1, \ldots, x^n).$$

Наряду с вектором $\tilde{\mathbf{x}}$ рассмотрим вектор

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$$

и вспомогательную функцию

$$K(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{u}) = \psi_\alpha f^\alpha(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n,$$

двух $n+1$-мерных векторов $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ и точки $\mathbf{u}$ множества Ω.

Для удобства номера координат векторов $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{f}}$ будем писать вверху, а вектора $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ — внизу.

Теорема 1. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\dot{x}^i = \frac{\partial K(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{u})}{\partial \psi_i}, \tag{7}$$

$$\dot{\psi}^i = -\frac{\partial K(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{u})}{\partial x_i}. \tag{8}$$

Система уравнений (7), (8) *содержит* $2(n+1)$ *уравнений. Она неполна, так как наряду с* $2(n+1)$ *неизвестными функциями* x_i, ψ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, *содержит еще неизвестную точку* $\mathbf{u}(t) \in \Omega$. *Система уравнений (7) содержит систему (5) управляемого объекта, а также определение функционала L (см. (6)). Оказывается, что для того чтобы управление* $\mathbf{u}(t)$ *было оптимально при заданном функционале L, необходимо, чтобы существовала ненулевая векторная функция* $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t)$, *удовлетворяющая системе уравнений* (7), (8), *и, кроме того, чтобы для любого t из отрезка* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *и для любой точки* $\mathbf{v} \in \Omega$ *выполнялось неравенство*

$$K(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{u}(t)) \geqslant K(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{v}). \tag{9}$$

Последнее неравенство так дополняет неполную систему (7), (8), что система уравнений (7), (8) вместе с (9), вообще говоря, определяет величины $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$.

Неравенство (9), составляющее центральный пункт теорем 1, дало основание назвать теорему 1 принципом максимума.

Глава 2. Некоторые вспомогательные сведения

В этой главе будут даны некоторые вспомогательные результаты из математики, которые я буду использовать, но которые я не считаю общеизвестными.

§4. Уравнение в вариациях. Здесь мы рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(x^0, x^1, \ldots, x^n, t) = f^i(\tilde{\mathbf{x}}, t). \tag{1}$$

Здесь

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$$

есть вектор $n+1$-мерного векторного пространства S^{n+1}, так что систему (1) в векторной форме можно записать в виде

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, t). \tag{2}$$

В дальнейшем нам придется рассматривать частную производную от функции $f^i(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ по x^j. Поэтому мы введем для нее обозначение. Именно, положим

$$\frac{\partial f^i(\tilde{\mathbf{x}}, t)}{\partial x^j} = f^i_j(\tilde{\mathbf{x}}, t).$$

Система уравнений (1) имеет бесконечное множество решений; для того чтобы выделить одно определенное решение $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, нужно задать начальное значение. Именно, для заданного значения t_0 задать начальное значение функции $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Это начальное значение обозначим $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$. Тогда начальным условием

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}$$

решение $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ однозначно определяется. Поскольку решение $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ определяется величинами t_0 и $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0$, выпишем зависимость функции $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ от этих величин в явном виде, положив

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, t_0, t).$$

Функция $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$, состоящая в правой части последнего равенства, удовлетворяет условию
$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, t_0, t_0) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}.$$

Допустим, что в момент $t = t_0$ функция $\tilde{x}(t)$ имеет начальное значение $\tilde{x}_0$. Заменим теперь это начальное значение начальным значением
$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\mathbf{x}}_0 + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon),$$
где ε — малое положительное число, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0$ — некоторый вектор, а $\tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)$ — величина более высокого порядка малости, чем ε, т.е.
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Посмотрим, как будет себя вести решение $\tilde{\mathbf{x}}$ с этим начальным значением. Мы имеем
$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{\mathbf{x}}_0 + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon), t_0, t) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{\mathbf{x}}_0 + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon), t_0, t), t) \qquad (3)$$
(см. (2)). Разложим обе части последнего равенства по степеням ε.

Разлагая левую часть равенства (3) по степеням ε, получим
$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(\tilde{\mathbf{x}}_0 + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon), t_0, t) = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\varphi^i(\tilde{\mathbf{x}}_0, t_0, t) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta^\alpha}\varphi^i(\tilde{\mathbf{x}}_0, t_0, t)\xi_0^\alpha + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

Разлагая правую часть равенства (3) по степеням ε. получим
$$f^i(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{\mathbf{x}}_0 + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon), t_0, t), t) = \\ = f^i(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t_0, t), t) + \varepsilon\frac{\partial f^i}{\partial x^\beta}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{\mathbf{x}}_0, t_0, t), t)\frac{\partial\varphi^\beta(\tilde{\mathbf{x}}_0, t_0, t)}{\partial\eta^\alpha}\xi_0^\alpha + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

Положим
$$\xi^i(t) = \frac{\partial}{\partial\eta^\alpha}\varphi^i(\tilde{\mathbf{x}}_0, t_0, t)\xi_0^\alpha.$$

Тогда функции $\xi^i(t)$ удовлетворяют системе
$$\dot{\xi}^i(t) = f^i_\alpha\xi^\alpha, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad (4)$$
и начальным условиям
$$\xi^i(t_0) = \xi_0^i.$$

Решение уравнения (2) с начальным значением $\tilde{\mathbf{x}}_0 + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)$ записывается в виде
$$\tilde{\mathbf{x}}(t) + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon),$$
где $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)$ — решение уравнения (4) с начальным значением $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t_0) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}_0$. Здесь $\tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)$ непрерывно зависит от $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0$, и $\dfrac{\tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)}{\varepsilon}$ равномерно стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Уравнение (4) называется уравнением в вариациях для уравнения (2).

A) Если в точке $t = \tau$ начальное значение управляемой величины равно $\tilde{\mathbf{x}}(\tau) + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)$, то в любой точке t отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ значение управляемой величины $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, по доказанному ранее, будет иметь вид $\tilde{\mathbf{x}}(t) + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)$, и вектор $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)$ будем считать переносом вектора $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau)$ из момента времени τ в момент времени t.

Перенося вектор $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau)$ из момента времени τ в момент времени t, мы получим вектор $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)$. Будем считать, что вектор $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau)$ задан в точке $\tilde{\mathbf{x}}(\tau)$, а вектор $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)$ — в точке $\tilde{\mathbf{x}}(t)$.

Положим
$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = A_{t,\tau}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau).$$

В силу линейности и однородности уравнения в вариациях (4) оператор $A_{t,\tau}$ — линейный, $A_{\tau,\tau}$ есть тождественное преобразование и, кроме того, выполнено соотношение
$$A_{t,s}A_{s,\tau} = A_{t,\tau},$$
где t, s, τ — точки отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Вектор $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t)$, являющийся решением системы (8) главы 1 с начальным условием $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau)$ в момент времени τ, будем считать переносом вектора $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau)$ из момента времени τ в момент времени t.

B) Если $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)$ — вектор, являющийся решением уравнения в вариациях (4), а $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t)$ — вектор, являющийся решением системы (8) главы 1, то скалярное произведение этих векторов постоянно:
$$\langle\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t)\rangle = \xi^\alpha(t)\psi_\alpha(t) = \text{const}.$$

Для доказательства последнего соотношения покажем, что производная по t скалярного произведения $\langle\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}\rangle$ есть нуль, используя при этом уравнение (4) и уравнение (8) из главы 1:
$$\frac{d}{dt}\xi^\alpha\boldsymbol{\psi}_\alpha = \dot{\xi}^\alpha\boldsymbol{\psi}_\alpha + \xi^\alpha\dot{\boldsymbol{\psi}}_\alpha = f^\alpha_\beta\xi^\beta\boldsymbol{\psi}_\alpha - \xi^\alpha f^\beta_\alpha\boldsymbol{\psi}_\beta = 0.$$

§5. Выпуклые множества. C) Множество M точек евклидова пространства R^n называется выпуклым, если вместе с двумя точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, принадлежащими множеству M, множеству M принадлежит и весь отрезок, соединяющий точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Точка $\mathbf{a} \in R^n$ называется граничной для множества M, если она является предельной для M и для множества $R^n \setminus M$, дополнительного к M в пространстве R^n.

Здесь под предельной точкой некоторого множества A подразумевается точка, к которой сходится последовательность точек из A.

Совокупность всех точек множества M, не являющихся его граничными точками, называется внутренностью M, а совокупность всех граничных точек M называется границей.

D) Координаты вектора $\boldsymbol{\psi} \in R^n$ естественно считать координатами гиперплоскости, проходящей через начало координат в пространстве R^n. Именно, вектору

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$$

ставится в соответствие гиперплоскость Γ из R^n, определяемая уравнением

$$\langle \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x} \rangle = \psi_\alpha x^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Так поставленная в соответствии вектору $\boldsymbol{\psi}$ гиперплоскость Γ разбивает пространство R^n на две части:

отрицательную, состоящую из тех точек $\mathbf{x}$, для которых

$$\langle \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x} \rangle \leqslant 0, \tag{6}$$

и положительную, для которой

$$\langle \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0. \tag{7}$$

Каждая гиперплоскость Γ пространства R^n, проходящая через начало координат, может быть задана уравнением вида (5).

Будем считать, что два множества A, B пространства R^n отделены друг от друга гиперплоскостью Γ, если одно из этих множеств находится в отрицательном полупространстве (6), а другое — в положительном (7). В смысле этого определения два множества A и B, лежащие в гиперплоскости Γ, отделены друг от друга этой гиперплоскостью, даже если они пересекаются или совпадают. Так что слово «отделены» не имеет здесь того интуитивного смысла, который ему естественно приписать.

Если некоторая гиперплоскость Γ' не проходит через начало координат, то она может быть задана гиперплоскостью Γ, параллельной ей, проходящей через начало координат, и некоторой точкой $\mathbf{a}$, через которую она проходит. Произвольная гиперплоскость Γ' также разбивает пространство R^n на две части — положительную и отрицательную, и в отношении нее также можно говорить, что она отделяет друг от друга два множества A и B из R^n.

E) Пусть $\mathbf{a}$ — граничная точка выпуклого множества M. Гиперплоскость Γ пространства R^n называется опорной гиперплоскостью к множеству M в точке $\mathbf{a}$, если она проходит через точку $\mathbf{a}$ и множество M лежит целиком по одну сторону от гиперплоскости Γ.

Докажем, что для каждой граничной точки $\mathbf{a}$ выпуклого множества M существует опорная гиперплоскость.

Пусть $\mathbf{c}$ — некоторая точка пространства R^n, не принадлежащая ни множеству M, ни его границе. Пусть, далее, $\mathbf{b}$ — точка из множества M или его границы, ближайшая к $\mathbf{c}$. Проведем через точку $\mathbf{c}$ гиперплоскость Γ, перпендикулярную отрезку $\mathbf{cb}$, и покажем, что все множество M лежит по одну сторону ("слева") от гиперплоскости Γ. Для этого спроектируем ортогонально множество M на прямую, содержащую отрезок $\mathbf{cb}$, и покажем, что все точки этой проекции M^* лежат по одну сторону ("слева") от точки $\mathbf{b}$.

Если это не так, то найдется точка $\mathbf{d}$ из множества M, проекция которой на прямую, содержащую отрезок $\mathbf{cb}$, лежит правее точки $\mathbf{b}$, и в этом случае точка $\mathbf{d}$ лежит правее гиперплоскости Γ. Проведем через точки $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ двумерную плоскость P и будем рассматривать чертежи в этой плоскости. Геометрически ясно, что угол $\mathbf{cbd}$ — острый и на отрезке $\mathbf{db}$ найдется точка $\mathbf{b}'$, лежащая к $\mathbf{c}$ ближе, чем $\mathbf{b}$, что противоречит предположению.

Пусть теперь $\mathbf{a}$ — произвольная граничная точка выпуклого множества M. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \ldots$ — последовательность точек из R^n, не принадлежащих ни M, ни его границе, сходящаяся к точке $\mathbf{a}$, и пусть $\mathbf{b}_k$ - точка из M или его границы, ближайшая к $\mathbf{a}_k$. По доказанному через точку $\mathbf{b_k}$ проходит опорная гиперплоскость Γ_k. Из последовательности гиперплоскостей Γ_k можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой гиперплоскости Γ, и эта гиперплоскость является опорной к множеству M в точке $\mathbf{a}$.

Итак, через каждую граничную точку $\mathbf{a}$ выпуклого множества M можно провести опорную гиперплоскость.

F) Конусом C в пространстве R^n с вершиной $\mathbf{o}$ называется такое множество, которое наряду с любой точкой $\mathbf{a}$ из множества C содержит весь луч l, выходящий из $\mathbf{o}$ и проходящий через точку $\mathbf{a}$.

Конус C называется выпуклым, если он является выпуклым множеством.

Если выпуклый конус C не совпадает со всем пространством R^n, то его вершина $\mathbf{o}$ является граничной точкой выпуклого множества C. По доказанному ранее через нее можно провести опорную гиперплоскость Γ к выпуклому конусу C.

G) Конус C является выпуклым, если наряду с любыми двумя своими точками $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ он содержит точку $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Действительно, если точки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ входят в конус C, то лучи, ведущие в эти точки, также входят в конус и точки $\alpha\mathbf{a}$, $(1-\alpha)\mathbf{b}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, входят в C. Следовательно, наряду с двумя точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в конус C входит точка $\alpha\mathbf{a}+(1-\alpha)\mathbf{b}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. А это означает, что конус C является выпуклым множеством.

H) Пусть C - выпуклый конус из пространства S^{n+1} с вершиной $\mathbf{o}$ и l - некоторый луч, выходящий из вершины $\mathbf{o}$ конуса C и не проходящий во внутренности C. Тогда существует опорная гиперплоскость Γ в точке $\mathbf{o}$ к конусу C такая, что луч l и конус C лежат по разные стороны от гиперплоскости Γ.

Для доказательства утверждения H) рассмотрим разность $C-l$ конуса C и луча l, т. е. множество точек вида $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, где точка $\mathbf{a}$ принадлежит C, а точка $\mathbf{b}$ — лучу l.

Непосредственно видно, что множество $C-l$ — выпуклый конус с вершиной в начале координат. Далее, луч l не пересекается с внутренностью конуса C и, следовательно, начало координат не является внутренней точкой конуса $C-l$, а лежит на его границе. Отсюда в силу предложения E) получаем, что через начало координат можно провести гиперплоскость Γ', опорную к конусу $C-l$. Тогда луч l и конус C лежат по разные стороны от гиперплоскости Γ, параллельной гиперплоскости Γ' и проходящей через точку $\mathbf{o}$.

Опишем простейшее выпуклое множество — n-мерный симплекс.

I) Пусть $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ — $n+1$ точек евклидова пространства R^r, $r \geqslant n$. Предположим, что векторы

$$\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n-\mathbf{x}_0$$

линейно независимы. В каждую точку $\mathbf{x}_i$ поместим груз $\lambda^i \geqslant 0$. Тогда центр тяжести $\mathbf{x}$ определяется формулой

$$\mathbf{x}=\frac{\lambda^\alpha \mathbf{x}_\alpha}{\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda^i}. \tag{8}$$

Предполагая, что

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda^i=1, \tag{9}$$

формула (8) принимает вид

$$\mathbf{x}=\lambda^\alpha\mathbf{x}_\alpha. \tag{10}$$

Совокупность всех точек вида (10), где $\lambda^0, \ldots, \lambda^n$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию (9), называется симплексом. Из самого определения симплекса видно, что он представляет собой выпуклое множество. Числа $\lambda^0, \ldots, \lambda^n$ называются барицентрическими координатами точки $\mathbf{x}$ симплекса, который мы обозначим через T^n. Точку симплекса, для которой все барицентрические координаты равны между собой, будем называть центром симплекса.

Если одна из координат λ^i равна нулю, то формула (10) описывает $n-1$-мерный симплекс, составляющий $n-1$-мерную грань n-мерного симплекса T^n. Совокупность всех $n-1$-мерных граней симплекса T^n будем называть границей симплекса T^n.

Если $r=n$, то каждую точку $\mathbf{x}=(x^1, \ldots, x^n)$ пространства R^n можно записать в виде

$$\mathbf{x}=\lambda^\alpha\mathbf{x}_\alpha,$$

где λ^i — уже необязательно неотрицательные числа, но соотношение (9) сохраняется. Для доказательства этого достаточно разрешить относительно $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^n$ систему уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{n}\lambda^i=1,\\ \lambda^\alpha\mathbf{x}_\alpha=\mathbf{x}.\end{gathered} \tag{11}$$

Рассмотрим матрицу системы (11). Она имеет вид

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \ldots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}.$$

Вычтем из всех столбцов этой матрицы ее первый столбец. Мы получим

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0 & \ldots & \mathbf{x}_n-\mathbf{x}_0\end{pmatrix}.$$

Так как векторы $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n-\mathbf{x}_0$ линейно независимы, то ранг последней матрицы равен $n+1$. Следовательно, матрица системы (11) имеет определитель, отличный от нуля, а система (11) имеет, причем единственное, решение.

Таким образом, в этом случае каждой точке $\mathbf{x}$ пространства R^n соответствует последовательность чисел $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^n$, определяемая из системы уравнений (11). Числа $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^n$ называются барицентрическими координатами точки $\mathbf{x}$. Координаты эти непрерывно зависят от точки $\mathbf{x}$.

Если точка $\mathbf{x}$ принадлежит границе симплекса T^n, то к ней сходится некоторая последовательность точек из T^n а также некоторая последовательность из $R^n \setminus T^n$. Таким образом граница симплекса T^n состоит из всех граничных точек выпуклого множества T^n в пространстве R^n.

J) Пусть $\boldsymbol{\beta}_\varepsilon(\mathbf{x})$ — непрерывная функция, заданная на n-мерном симплексе T^n со значениями в R^n ($\mathbf{x} \in T^n$, $\varepsilon \geqslant 0$). При $\varepsilon = 0$ отображение $\boldsymbol{\beta}_0(x)$ — тождественное и $\boldsymbol{\beta}_\varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Тогда при достаточно малых ε центр симплекса T^n принадлежит множеству $\boldsymbol{\beta}_\varepsilon(T^n)$.

Это утверждение я привожу здесь без доказательства.

Глава 3. Доказательство принципа максимума

§6. Вариации Макшейна. Если величина принимает числовые значения, то малое ее изменение принято называть приращением. Аналогично малое изменение функции принято называть ее вариацией. Здесь мы будем заниматься вариациями управления $\mathbf{u}(t)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$). Обычно считается, что замена управления $\mathbf{u}(t)$ управлением $\mathbf{u}^*(t)$ является вариацией, если выполнено условие

$$|\mathbf{u}^*(t) - \mathbf{u}(t)| < \varepsilon,$$

где ε — малое положительное число. Макшейн предложил изменить $\mathbf{u}(t)$ не на всем протяжении $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ на малую величину ε, а на малом промежутке значений t на конечную величину. В этом его главное, на мой взгляд, нововведение. Дадим точное определение вариации Макшейна.

А) Пусть τ — некоторое значение t, принадлежащее интервалу $I:\ t_0 < t < t_1$, являющееся точкой непрерывности управления $\mathbf{u}(t)$, и σ - некоторое неотрицательное число, ε - малое положительное число. Изменим теперь управление $u(t)$ на отрезке $J = J(\tau;\ \sigma;\ \varepsilon)$:

$$\tau - \varepsilon\sigma < t \leqslant \tau,$$

заменив функцию $\mathbf{u}(t)$ на этом отрезке некоторым постоянным значением $\mathbf{v} \in \Omega$ (см. §1А)). Говорят, что так полученное управление $\mathbf{u}^*(t)$ получается из $\mathbf{u}(t)$ при помощи одночленной вариации Макшейна, которую обозначим через $M(\tau;\sigma;v;\varepsilon)$ (рис. 1).

Выясним теперь, как изменится управляемая величина $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, определяемая уравнением

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(t))$$

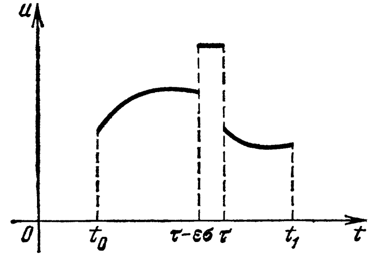

Рис. 1

при замене управления $\mathbf{u}(t)$ управлением $\mathbf{u}^*(t)$ и при сохранении начального значения, т. е. при условии $\tilde{\mathbf{x}}_0^*(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}(t_0)$. Именно, мы хотим сравнить значения $\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(\tau)$, т.е. сравнить обе управляемые величины, после прохождения отрезка J.

В) Оказывается, что

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau))) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon). \qquad (1)$$

Докажем соотношение (1). Ясно, что

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \tilde{\mathbf{x}}^*(\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \int\limits_{\tau-\varepsilon\sigma}^{\tau} (\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau)))dt. \qquad (2)$$

Далее,

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau), \mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{O}}(\varepsilon),$$

где $\tilde{\mathbf{O}}(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε. Аналогично при $\tau - \varepsilon\sigma < t \leqslant \tau$ и в силу непрерывности $\mathbf{u}(t)$ в точке τ

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) = \tilde{\mathbf{O}}(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + \tilde{\mathbf{O}}(\varepsilon).$$

Следовательно, интеграл (2) может быть записан в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \int\limits_{\tau-\varepsilon\sigma}^{\tau} (\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)))dt =$$

$$= \int\limits_{\tau-\varepsilon\sigma}^{\tau} (\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau)))dt + \varepsilon\sigma\tilde{\mathbf{O}}(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon). \tag{3}$$

В силу формул (2) и (3) имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{f}}(\widetilde{\mathbf{x}^*}(\tau), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau))) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon). \tag{4}$$

Заменяя в первом члене правой части формулы (4) $\tilde{\mathbf{f}}(\widetilde{\mathbf{x}^*}(\tau), \mathbf{v})$ на $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{v})$, получим изменение правой части этого равенства на величину $\tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)$. Таким образом, будем иметь

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \varepsilon\sigma(\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon). \tag{5}$$

Эта последняя формула (5) дает ответ на вопрос, сформулированный перед предложением B).

Усложним несколько одночленную вариацию Макшейна (см. A), изменив управление $\mathbf{u}(t)$ не на одном отрезке времени вблизи τ, а на нескольких отрезках $J_1, J_2, \ldots, J_s$, близких к τ.

C) На отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ выберем момент времени τ, $t_0 < t < t_1$, являющийся точкой непрерывности управления $\mathbf{u}(t)$, а затем s отрезков времени $J_1, J_2, \ldots, J_s$ слева от момента времени τ так, чтобы эти отрезки шли, примыкая друг к другу в направлении возрастания времени, причем так, чтобы s-й отрезок заканчивался в момент времени τ.

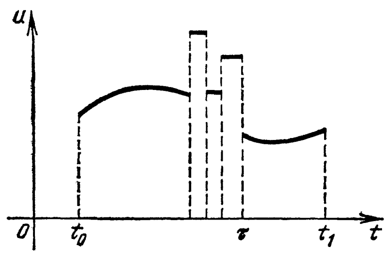

Рис. 2

Длина отрезка J_k, $k = 1, \ldots, s$, равна $\varepsilon\sigma_k$, где ε — малое положительное число, а σ_k — неотрицательное число. На отрезке J_k управление $\mathbf{u}(t)$ заменим постоянным управлением $v_k \in \Omega$. Вне отрезков $J_1, J_2, \ldots, J_s$ управление $\mathbf{u}(t)$ менять не будем. В результате этой операции получим новое управление $\mathbf{u}^*(t)$. Будем говорить, что новое управление $\mathbf{u}^*(t)$ получено из управления $\mathbf{u}(t)$ при помощи вариации Макшейна, которую обозначим через (рис. 2)

$$M(\tau;\ \sigma_1, \ldots, \sigma_s;\ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s;\ \varepsilon) \tag{6}$$

D) Сравним теперь управляемую величину $\tilde{\mathbf{x}}$, заданную уравнением

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(t)),$$

с управляемой величиной $\tilde{\mathbf{x}}^*$, определяемой уравнением

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^* = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \mathbf{u}^*(t)),$$

в момент времени τ, т.е. после прохождения времени t через отрезки $J_1, J_2, \ldots, J_s$, где $\mathbf{u}^*(t)$ получается из $\mathbf{u}(t)$ вариацией (6).

Так же, как в предложении B), доказывается формула

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \varepsilon \sum_{i=1}^{s} \sigma_i(\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \tilde{\mathbf{v}}_i) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \tilde{\mathbf{u}}(\tau))) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon). \tag{7}$$

E) Определим теперь многочленную вариацию Макшейна M как вариацию, полученную в результате последовательного применения конечного числа вариаций $M_1, M_2, \ldots, M_r$, где каждое M_i представляет собой вариацию, описанную в пункте C) с $\tau = \tau_i$, при этом

$$t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_r < t_1$$

— точки непрерывности управления $\mathbf{u}(t)$ (рис. 3).

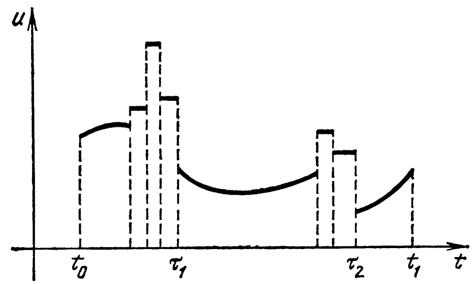

Рис. 3

F) Сравним управляемую величину $\tilde{\mathbf{x}}$, заданную уравнением

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}(t)),$$

с управляемой величиной $\tilde{\mathbf{x}}^*$, определяемой уравнением

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^* = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{u}}^*(t)),$$

в момент времени $\tau = \tau_r$, т. е. после прохождения времени t всех отрезков, на которых $\mathbf{u}(t)$ подвергалось изменению, где $\mathbf{u}^*(t)$ получается из $\mathbf{u}(t)$ многочленной вариацией Макшейна M, описанной в пункте E).

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_r$ — вариации Макшейна, описанные в пункте C), последовательное применение которых образует вариацию M. Для простоты изложения рассмотрим только случай $r = 2$. Обозначим через $\varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1 + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)$ и $\varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}_2 + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon)$ те приращения, которые получает управляемая величина $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ в результате применения вариаций M_1 и M_2 в точках τ_1 и τ_2 соответственно (см. D)). В результате последовательного применения вариаций Макшейна M_1 и M_2 управляемая величина получит в точке $\tau = \tau_2$ приращение (см. пункт A) §4)

$$\varepsilon A_{\tau_2,\tau_1}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1 + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}_2 + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

G) Если управление $\mathbf{u}(t)$ подвергается вариации Макшейна M (см. A), C), E)), то мы получаем новое управление $\mathbf{u}^*(t)$. Если исходная управляемая величина $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ задавалась управлением $\mathbf{u}(t)$, а новая управляемая величина $\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$ задается управлением $\mathbf{u}^*(t)$, то в момент времени τ, взятый после прохождения всех отрезков времени, на которых $\mathbf{u}(t)$ подверглось изменению, управляемые величины $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$ имеют, вообще говоря, разные значения. Именно,

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

Если примененная вариация Макшейна была одночленной, то

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau) = \sigma(\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \tilde{\mathbf{u}}(\tau)))$$

(см. B)). В случае вариации Макшейна, описанной в предложении C),

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau) = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i(\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \tilde{\mathbf{v}}_i) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(\tau), \tilde{\mathbf{u}}(\tau)))$$

(см. D)). В случае многочленной вариации Макшейна $\tau = \tau_r$ и

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau) = A_{\tau,\tau_1}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1 + A_{\tau,\tau_2}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_2 + \ldots + A_{\tau,\tau_r}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_r \tag{8}$$

(см. F)).

Если вектор $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau)$, заданный в точке $\tilde{\mathbf{x}}(\tau)$, перенести из момента времени τ в момент времени t_1 (см. A) §4), то обозначим полученный в точке $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$ вектор через $\boldsymbol{\varphi}(M)$, т. е. положим

$$\boldsymbol{\varphi}(M) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t_1).$$

Так что в конце отрезка времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ мы имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) - \tilde{\mathbf{x}}(t_1) = \varepsilon\boldsymbol{\varphi}(M) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

§7. Сложение вариаций Макшейна. Определим прежде всего сумму двух одночленных вариаций Макшейна, описанных в предложении A).

H) Пусть

$$M = M(\tau;\ \sigma;\ \mathbf{v};\ \varepsilon) \tag{9}$$

и

$$M' = M'(\tau';\ \sigma';\ \mathbf{v}';\ \varepsilon') \tag{10}$$

— две одночленных вариации Макшейна, описанные в предложении A). Если $\tau = \tau'$, то их сумму определим следующим образом:

$$M(\tau;\ \sigma;\ \mathbf{v};\ \varepsilon) + M'(\tau';\ \sigma';\ \mathbf{v}';\ \varepsilon') = M(\tau;\ \sigma, \sigma';\ \mathbf{v}, \mathbf{v}';\ \varepsilon)$$

(см. C)). Если $\tau' \neq \tau$, то сумму $M + M'$ вариаций (9), (10) определим как многочленную вариацию, получающуюся в результате последовательного применения вариаций M и M' (см. E)). Из формул (7), (8) следует, что

$$\boldsymbol{\varphi}(M) + \boldsymbol{\varphi}(M') = \boldsymbol{\varphi}(M + M').$$

I) Определим сумму двух вариаций Макшейна, описанных в пункте C),

$$M = M(\tau;\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s;\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s;\ \varepsilon),$$
$$M' = M'(\tau';\ \sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_p;\ \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_p; \varepsilon)$$

при $\tau' \neq \tau$, как последовательное применение этих двух вариаций. Если же $\tau' = \tau$, то сумму определим следующим образом:

$$M + M' = M(\tau;\ \sigma_1, \ldots, \sigma_s, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_p;\ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_p;\ \varepsilon).$$

Так же, как в предложении H), ясно, что

$$\boldsymbol{\varphi}(M + M') = \boldsymbol{\varphi}(M) + \boldsymbol{\varphi}(M').$$

Заметим, что многочленная вариация Макшейна M (см. E)) может быть представлена в виде суммы

$$M = M_1 + \ldots + M_r,$$

где M_i — вариация, описанная в пункте C).

J) Определим теперь сумму двух многочленных вариаций Макшейна, описанных в предложении E). Для этого прежде всего заметим, что можно считать встречающиеся в этих вариациях τ

одинаковыми, так как в каждую вариацию можно ввести дополнительное τ, считая, что соответствующие $\sigma = 0$. Пусть

$$M = M_1 + \ldots + M_r, \tag{11}$$
$$M' = M'_1 + \ldots + M'_r \tag{12}$$

— две такие вариации, где M_i и M'_i - вариации, описанные в пункте C). Сумму этих двух вариации зададим формулой

$$M + M' = \sum_{i=1}^{r}(M_i + M'_i), \tag{13}$$

где первоначально суммируются вариации Макшейна, описанные в пункте C) с одинаковым τ_i, (см. I)), а затем берется сумма всех парных сумм.

Сумма парных сумм получается в результате последовательного применения каждой парной суммы и поэтому является многочленной вариацией Макшейна. Для каждой парной суммы имеет место формула (см. I))

$$\boldsymbol{\varphi}(M_i + M'_i) = \boldsymbol{\varphi}(M_i) + \boldsymbol{\varphi}(M'_i).$$

Для суммы же парных сумм (13) имеет место формула (см. F))

$$\boldsymbol{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{r}(M_i + M'_i)\right) = \sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{\varphi}(M_i + M'_i).$$

Таким образом, для суммы двух многочленных вариаций Макшейна (11) и (12) получаем

$$\boldsymbol{\varphi}(M + M') = \boldsymbol{\varphi}(M) + \boldsymbol{\varphi}(M').$$

Определим теперь умножение вариации Макшейна на действительное неотрицательное число.

K) Для того чтобы умножить некоторую вариацию Макшейна M на действительное неотрицательное число $\lambda \geqslant 0$, следует каждое число σ, входящее в определение вариации Макшейна, умножить на λ. В результате этой операции мы получим новую вариацию Макшейна. Так, умножение одночленной вариации Макшейна (см. A)) на λ описывается формулой

$$\lambda M(\tau;\ \sigma;\ \mathbf{v};\ \varepsilon) = M(\tau;\ \lambda\sigma;\ \mathbf{v};\ \varepsilon),$$

а умножение на λ вариаций Макшейна, описанных в предложении C), задается формулой

$$\lambda M(\tau;\ \sigma_1, \ldots, \sigma_s;\ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s;\ \varepsilon) = \\ = M(\tau;\ \lambda\sigma_1, \ldots, \lambda\sigma_s;\ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s;\ \varepsilon).$$

Аналогично определяется произведение многочленной вариации Макшейна M на число λ.

Далее, непосредственно видно, что если M есть вариация Макшейна, то

$$\boldsymbol{\varphi}(\lambda M) = \lambda\boldsymbol{\varphi}(M), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Таким образом, отображение $\boldsymbol{\varphi}$ является линейным отображением при неотрицательных коэффициентах. И потому множество всех векторов $\boldsymbol{\varphi}(M)$, где M — произвольная многочленная вариация Макшейна, представляет собой выпуклый конус с вершиной $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$.

§8. Расширение класса рассматриваемых вариаций. Расширим класс рассматриваемых вариаций Макшейна, присоединив к ним еще один действительный параметр α, который может быть как положительным, так и отрицательным. Новую вариацию управления $\mathbf{u}(t)$ мы обозначим $V(M, \alpha)$ в знак того, что она зависит от вариации Макшейна M и действительного числа α. Применяя эту вариацию к заданному управлению $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, получим новое управление $\mathbf{u}^*(t)$, которое будет задано не на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, а на новом отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon\alpha$. На отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ будем считать, что $\mathbf{u}^*(t)$ получено из $\mathbf{u}(t)$ вариацией Макшейна M, а затем вблизи $t = t_1$ определено в зависимости от α. При положительном α управление $\mathbf{u}^*(t)$ задано на большем отрезке, чем исходное управление $\mathbf{u}(t)$, а при отрицательном α — на меньшем отрезке. При определении вариации $V(M, \alpha)$ надо внимательно различать случаи положительного и отрицательного α. При $\alpha > 0$ мы определим управление $\mathbf{u}^*(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon\alpha$, положив

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}(t_1), \quad t_1 < t \leqslant t_1 + \varepsilon\alpha,$$

так что на этом отрезке времени управляемая величина $\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$ задается формулой

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(t) = \tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) + (t - t_1)\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \mathbf{u}(t_1)) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

При $\alpha < 0$ мы определим $\mathbf{u}^*(t)$ на отрезке $t_1 + \varepsilon\alpha < t \leqslant t_1$, положив

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}(t), \quad \alpha < 0, \quad t_1 + \varepsilon\alpha < t \leqslant t_1.$$

Так что при $t_1 + \varepsilon\alpha < t \leqslant t_1$ имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(t) = \tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t))dt = $$
$$= \tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}(t))dt =$$
$$= \tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) + (t - t_1)\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \mathbf{u}(t_1)) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

Таким образом, при $t = t_1 + \varepsilon\alpha$ имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(t_1 + \varepsilon\alpha) = \tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) + \varepsilon\alpha\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \mathbf{u}(t_1)) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

(как при положительном, так и отрицательном α).

Итак, новое управление $u^*(t)$ определено на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^* = t_1 + \varepsilon\alpha$, и мы имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(t_1^*) = \tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) + \varepsilon\alpha\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \mathbf{u}(t_1)) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon). \qquad (14)$$

Определим теперь сумму двух вариаций $V(M_1, \alpha_1)$ и $V(M_2, \alpha_2)$, положив

$$V(M_1,\, \alpha_1) + V(M_2,\, \alpha_2) = V(M_1 + M_2,\, \alpha_1 + \alpha_2).$$

Далее, определим умножение вариаций $V(M,\, \alpha)$ на неотрицательное число $\lambda \geqslant 0$, положив

$$\lambda V(M,\, \alpha) = V(\lambda M,\, \lambda\alpha).$$

Определим, далее, линейное отображение $\boldsymbol{\varphi}$ применительно к вариации $V(M,\, \alpha)$, положив

$$\boldsymbol{\varphi}(V(M,\, \alpha)) = \boldsymbol{\varphi}(M) + \alpha\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \mathbf{u}(t_1)).$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}(M)$ есть вектор, выходящий из точки $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$ (см. G)), а $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \mathbf{u}(t_1))$ мы будем рассматривать как вектор, также выходящий из точки $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$. Таким образом, все векторы

$$\boldsymbol{\varphi}(V(M,\, \alpha))$$

выходят из точки $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$ и совокупность их образует выпуклый конус C с вершиной в точке $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$ (см. K) § 7).

Если к управлению $\mathbf{u}(t)$ применяется вариация $V(M,\, \alpha)$, то первоначально применяется вариация M к управлению $\mathbf{u}(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. При этом (см. G)) для соответствующих управляемых величин выполняется соотношение

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) - \tilde{\mathbf{x}}(t_1) = \varepsilon\boldsymbol{\varphi}(M) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon). \qquad (15)$$

Если, далее, в окрестности точки t_1 применить вариацию, соответствующую числу α, то мы получим соотношение (14).

Таким образом, применяя к управлению $\mathbf{u}(t)$ вариацию $V(M,\, \alpha)$ получим новое управление $\mathbf{u}^*(t)$, заданное на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon\alpha = t_1^*$, причем для управляемой величины $\tilde{\mathbf{x}}^*$ имеет место соотношение (14). Сопоставляя соотношения (15) и (14), получаем

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) - \tilde{\mathbf{x}}(t_1) = \varepsilon\boldsymbol{\varphi}(V(M,\, \alpha)) + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon). \qquad (16)$$

Перенесем теперь начало координат пространства S^{n+1} в точку $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$. При этом ось, полученную перенесением x^i, обозначим y^i. Координатную гиперплоскость, в которой лежат оси $y^1, \ldots, y^n$, обозначим Y^n.

L) Оказывается, что если отрицательное направление оси y^0 проходит внутри конуса C, то взятое нами управление $\mathbf{u}(t)$ не оптимально.

Для доказательства этого в гиперплоскости Y^n выберем n-мерный симплекс T^n с вершинами $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, с центром в начале координат. Оператор проектирования в направлении оси y^0 на гиперплоскость Y^n обозначим χ. Параллельно переместим симплекс T^n в направлении отрицательной полуоси y^0 на некоторую величину h. Тогда для достаточно большого h получим симплекс T_h^n с вершинами $\tilde{\mathbf{b}}_0 = \begin{pmatrix} -h \\ \mathbf{a}_i \end{pmatrix}, \ldots, \tilde{\mathbf{b}}_n = \begin{pmatrix} -h \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$, лежащими в конусе C, причем $\mathbf{a}_i = \chi(\tilde{\mathbf{b}}_i)$. Кроме того, все точки $\tilde{\mathbf{b}}_i$ имеют ненулевую координату $b_i^0 = -h$.

Пусть $\mathbf{a}$ - произвольная точка симплекса T^n. Тогда точка $\mathbf{a}$ может быть записана в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i \mathbf{a}_i, \quad \lambda^i \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda^i = 1,$$

где λ^i — барицентрические координаты точки $\mathbf{a}$ (см. I) §5). Точка $\mathbf{a} \in T^n$ является проекцией точки

$$\tilde{\mathbf{b}} = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i \tilde{\mathbf{b}}_i$$

из симплекса T_h^n. Для каждой вершины $\tilde{\mathbf{b}}_i$ выберем такую вариацию $V(M_i, \alpha_i)$, что

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \boldsymbol{\varphi}(V(M_i, \alpha_i)).$$

Тогда

$$\tilde{\mathbf{b}} = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i \boldsymbol{\varphi}(V(M_i, \alpha_i)) = \boldsymbol{\varphi}(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i V(M_i, \alpha_i)).$$

Таким образом, точке a поставлена в соответствие вариация

$$V(M, \alpha) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i V(M_i, \alpha_i) = V\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i M_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda^i \alpha_i\right).$$

Конец траектории соответствующей вариации $V(M, \alpha)$ записывается в виде (см. (16))

$$\tilde{\mathbf{x}}^*(t_1^*) = \tilde{\mathbf{x}}(t_1) + \varepsilon\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{o}}(\varepsilon).$$

Тогда отображение

$$\boldsymbol{\beta}_\varepsilon(\mathbf{a}) = \frac{1}{\varepsilon}\chi(\tilde{\mathbf{x}}^*(t_1^*) - \tilde{\mathbf{x}}(t_1)) = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{o}(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\boldsymbol{\beta}_0(\mathbf{a}) = \mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ — произвольная точка симплекса T^n, определено для малых неотрицательных ε, непрерывно и $\boldsymbol{\beta}_\varepsilon(\mathbf{a}) - \mathbf{a}$ равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, при достаточно малых ε среди точек вида $\boldsymbol{\beta}_\varepsilon(\mathbf{a})$ содержится начало координат пространства Y^n (см. J) §5). Таким образом, найдется такая вариация $V(M_*, \alpha_*)$, что соответствующая траектория $\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$ удовлетворяет условию $\chi(\tilde{\mathbf{x}}^*(t_1) - \tilde{\mathbf{x}}(t_1)) = 0$. При этом разность $x^{*0}(t_1^*) - x^0(t_1) = -\varepsilon h + o(\varepsilon)$ — отрицательная величина порядка ε. Следовательно, функционал L для управляемой траектории $\tilde{\mathbf{x}}^*(t)$ с управлением $\mathbf{u}^*(t)$ имеет меньшее значение, чем для управляемой величины $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ с управлением $\mathbf{u}(t)$.

Следовательно, управление $\mathbf{u}(t)$ не является оптимальным в отношении функционала L. Итак, оказывается, что если отрицательное направление оси y^0 содержится внутри конуса C, то управление $\mathbf{u}(t)$ не оптимально.

Теперь мы рассмотрим случай, когда отрицательное направление оси y^0 не лежит внутри конуса C.

M) Предположим, что отрицательное направление оси y^0 не лежит внутри конуса C. Тогда существует гиперплоскость Γ, отделяющая конус C от отрицательной полуоси y^0 (см. H) §5). Пусть $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ — координаты гиперплоскости Γ, причем знак их выбран так, что конус C лежит в отрицательном полупространстве этой гиперплоскости Γ, а отрицательная полуось y^0 - в положительной части.

Пусть M — некоторая вариация Макшейна и α — некоторое действительное число такие, что, применяя вариацию $V(M, \alpha)$, мы получаем управление $\mathbf{u}^*(t)$, для которого $\boldsymbol{\varphi}(V(M, \alpha))$ лежит в конусе C. Тогда

$$\langle \boldsymbol{\varphi}(V(M, \alpha)), \tilde{\boldsymbol{\psi}} \rangle \leqslant 0.$$

Перенося вектор $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ из момента времени t_1 в момент времени t, являющийся точкой непрерывности управления $u(t)$ (см. A), B) §4), получим

$$\langle \sigma(\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t) \rangle \leqslant 0$$

для одночленной вариации Макшейна $M(t; \sigma; \mathbf{v}; \varepsilon)$. Переписывая последнее соотношение в терминах функции K, получим

$$K(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{v}) \leqslant K(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{u}(t)),$$

т. е.

$$K(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{u}(t)) \geqslant K(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{v}).$$

Таким образом, мы доказали принцип максимума для точек непрерывности управления $\mathbf{u}(t)$. Для точек разрыва управления $\mathbf{u}(t)$ принцип максимума получается при помощи предельного перехода.

Таким образом,теорема 1 доказана.

Сформулируем теперь дополнение к принципу максимума.

Дополнение к принципу максимума. *Для оптимального управления $\mathbf{u}(t)$ и соответствующей ему траектории $\mathbf{x}(t)$ существует такая гиперплоскость Γ (см. M)), (проходящая через точку $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$, с координатами $\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t_1) = (\psi_0(t_1), \ldots \ldots, \psi_n(t_1))$, что*

$$\langle \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \mathbf{u}(t_1)), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t_1) \rangle = 0,$$

т. е.

$$K(\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t_1), \mathbf{u}(t_1)) = 0.$$

Последнее равенство выполняется для произвольного t, т.е. $K(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{u}(t)) \equiv 0$. Кроме того, $\psi_0(t)$ — неположительная постоянная величина.

Докажем это утверждение. Поскольку вектор $\alpha\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1),\mathbf{u}(t_1))$ лежит в конусе C, то выполняется неравенство (см. М))

$$\langle\alpha\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1),\mathbf{u}(t_1)),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t_1)\rangle=\alpha\langle\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1),\mathbf{u}(t_1)),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t_1)\rangle\leqslant 0,$$

а так как α может принимать значения обоих знаков, то

$$\langle\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_1),\mathbf{u}(t_1)),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t_1)\rangle=0,$$

т.е.

$$K(\tilde{\mathbf{x}}(t_1),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t_1),\mathbf{u}(t_1))=0.$$

Покажем теперь, что функция $K(t)=K(\tilde{\mathbf{x}}(t),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t),\mathbf{u}(t))$ постоянна. Пусть $t_0\leqslant t_2<t_3\leqslant t_1$, причем на полуинтервале $t_2<t\leqslant t_3$ функция $\mathbf{u}(t)$ непрерывна. Докажем, что на этом полуинтервале функция $K(t)$ постоянна. Возьмем две произвольные точки τ_0 и τ_1 полуинтервала $t_2<t\leqslant t_3$ В силу (9) гл. 1 имеем

$$K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_0),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_0),\mathbf{u}(\tau_0))-K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_0),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_0),\mathbf{u}(\tau_1))\geqslant 0,$$
$$-K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_1),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_1),\mathbf{u}(\tau_1))+K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_1),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_1),\mathbf{u}(\tau_0))\leqslant 0.$$

Прибавляя к обеим частям этих неравенств разность $K(\tau_1)-K(\tau_0)$, получим неравенства

$$\begin{aligned}-K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_0),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_0),\mathbf{u}(\tau_0))+K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_1),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_1),\mathbf{u}(\tau_0))&\leqslant\\ \leqslant K(\tau_1)-K(\tau_0)&\leqslant\\ \leqslant K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_1),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_1),\mathbf{u}(\tau_1))-K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_0),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_0),\mathbf{u}(\tau_1)).&\quad(17)\end{aligned}$$

Далее, так как функция $K(\tilde{\mathbf{x}}(t),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t),\mathbf{u}(\tau))$ переменного t на отрезке $t_2<t<t_3$ непрерывна и имеет производную, равную нулю в точке $t=\tau$ в силу (7), (8) гл. 1, $\dfrac{K(\tau_1)-K(\tau_0)}{\tau_1-\tau_0}$ стремится к нулю при $\tau_1-\tau_0\to 0$. Следовательно, функция $K(t)$ имеет производную, равную нулю в каждой точке τ интервала $t_2<t<t_3$, и потому $K(t)=\mathrm{const}$ на полуинтервале $t_2<t\leqslant t_3$.

Пусть τ_0 — точка разрыва функции $\mathbf{u}(t)$. Докажем, что, тем не менее, функция $K(t)$ непрерывна в ней, т.е. докажем, что

$$K(\tau_0)=K(\tau_0-0)=K(\tau_0+0).$$

(Величины $K(\tau_0-0)$, $K(\tau_0+0)$ существуют, так как по условию существуют пределы слева и справа $\mathbf{u}(\tau_0-0)$, $\mathbf{u}(\tau_0+0)$.) Равенство $K(\tau_0)=K(\tau_0-0)$ выполняется в силу определения из А) §1.

Докажем равенство $K(\tau_0)=K(\tau_0+0)$. Из условия (9) гл. 1 вытекает

$$\begin{aligned}K(\tau_0)=K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_0),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_0),\mathbf{u}(\tau_0))&\geqslant\\ \geqslant K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_0),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_0),\mathbf{u}(\tau_0+0))&=K(\tau_0+0).\end{aligned}$$

Для доказательства обратного неравенства предположим, что точка τ_1 стремится к τ_0 справа. Тогда

$$K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_1),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_1),\mathbf{u}(\tau_1))\to K(\tau_0+0),$$

$$K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_1),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_1),\mathbf{u}(\tau_0-0))\to K(\tau_0-0),$$

причем для всех τ_1 в силу условия (9) гл. 1 имеем

$$K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_1),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_1),\mathbf{u}(\tau_1))\geqslant K(\tilde{\mathbf{x}}(\tau_1),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\tau_1),\mathbf{u}(\tau_0-0)),$$

следовательно,

$$K(\tau_0+0)\geqslant K(\tau_0-0).$$

Из доказанного вытекает постоянство функции $K(\tilde{\mathbf{x}}(t),\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t),\mathbf{u}(t))$ на всем отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, а так как в конце отрезка она равна нулю, то функция эта равна нулю всюду.

Из системы уравнении (8) гл. 1 следует, что $\dot{\psi}_0=0$, так как $K(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\boldsymbol{\psi}},\mathbf{u})$ не зависит от x^0, так что ψ_0 — постоянная величина.

Пусть $\tilde{\mathbf{e}}=(-1,0,\ldots,0)$ — вектор, направленный по оси y^0 в отрицательном направлении. Тогда произведение $\langle\tilde{\mathbf{e}},\tilde{\boldsymbol{\psi}}\rangle$ неотрицательно,

$$\langle\tilde{\mathbf{e}},\tilde{\boldsymbol{\psi}}\rangle\geqslant 0,$$

так как вектор $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ разделяет отрицательную полуось y^0 и конус C и направлен в противоположную от C сторону.

Следовательно, $\psi_0\leqslant 0$.

Глава 4. Задача быстродействия

Пусть R^n — n-мерное евклидово векторное пространство, так что вектор $x\in R^n$ записывается в виде

$$\mathbf{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^n).$$

Допустим, что в пространстве R^n задана управляемая система (см. §1)

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,x^2,\ldots,x^n,\ \mathbf{u}),\quad \mathbf{u}\in\Omega,$$

или, в векторной записи,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad u \in \Omega. \tag{1}$$

Предположим, что существует управление $\mathbf{u}(t)$, переводящее вектор $\mathbf{x}_0$ в вектор $\mathbf{x}_1$, т. е. уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t))$$

имеет решение $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющее условиям

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$$

для некоторых значений $t_0 \leqslant t_1$.

Тогда возникает задача: найти такое управление $\mathbf{u}^*(t)$, для которого переход из состояния $\mathbf{x}_0$ в состояние $\mathbf{x}_1$ происходит за кратчайшее время. Это и есть задача быстродействия.

Для задачи быстродействия функционал L записывается в виде

$$L = \int_{t_0}^{t_1} dt,$$

т. е. функция $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ определяется соотношением

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1.$$

Таким образом, функция $K(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{u})$ в задаче быстродействия записывается в виде

$$K(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{u}) = \psi_0 + \psi_\alpha f^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

А) Положим

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}) = \psi_\alpha f^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Тогда функция K записывается в форме

$$K(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \mathbf{x}) = \psi_0 + H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}),$$

условие максимума (см. (9) гл. 1) принимает вид

$$H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{v}) \leqslant H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t)),$$

а системы уравнений (7) и (8) (см. гл. 1) получают вид

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})}{\partial \psi_i}, \tag{2}$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})}{\partial x^i}. \tag{3}$$

Из дополнения к принципу максимума следует, что функция $\boldsymbol{\psi(t)}$ — ненулевая.

Это и есть принцип максимума для задачи быстродействия.

§9. Линейная задача быстродействия. Задача быстродействия называется линейной, если управляемая система (1) записывается в следующем простом виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}, \tag{4}$$

а множество Ω, которому принадлежит управление $\mathbf{u}$, является выпуклым многогранником пространства R^n. Здесь A есть линейное отображение пространства R^n в себя или, в случае координатной записи, A является квадратной матрицей порядка n, а $\mathbf{x}$ — одностолбцовая матрица высоты n.

В линейном случае уравнение (3) переписывается в виде

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\psi} A, \tag{5}$$

где справа стоит произведение однострочной матрицы $\boldsymbol{\psi}$ длины n на квадратную матрицу A порядка n.

Для получения некоторых результатов характера единственности мы будем налагать на управляемую систему (4) нижеследующие условия B) и C), роль которых выяснится в дальнейшем.

B) Пусть $\mathbf{w}$ — некоторый вектор из R^n, имеющий направление какого-либо из ребер многогранника Ω; тогда вектор $\mathbf{w}$ не принадлежит никакому истинному подпространству пространства R^n, инвариантному относительно оператора A. Условие это равносильно тому, что векторы

$$\mathbf{w}, A\mathbf{w}, \ldots, A^{n-1}\mathbf{w} \tag{6}$$

линейно независимы.

В самом деле, если бы существовало истинное подпространство $\hat{R}$ пространства R^n, инвариантное относительно A, то все векторы (6) принадлежали бы пространству $\hat{R}$ и, следовательно, были бы линейно зависимы, так как $\hat{R}$ имеет размерность меньше n. Напротив, если бы векторы (6) были бы линейно зависимы, т. е. если бы имело место соотношение

$$c_0\mathbf{w} + c_1 A\mathbf{w} + \cdots + c_{n-1}A^{n-1}\mathbf{w} = 0, \tag{7}$$

то, выбирая наименьшую степень p, входящую в соотношение (7), мы из последнего соотношения (7) получили бы

$$A^p\mathbf{w} = b_{p-1}A^{p-1}\mathbf{w} + \cdots + b_0\mathbf{w},$$

и векторы $\mathbf{w}, A\mathbf{w}, \ldots, A^{p-1}\mathbf{w}$ все содержались бы в некотором истинном подпространстве $\hat{R}$ размерности p, инвариантном относительно оператора A.

C) Выпуклый многогранник Ω содержит начало координат $\mathbf{0} \in R^n$ и не состоит только из нуля.

В линейном случае функция $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})$ записывается в виде

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\psi}A\mathbf{x} + \langle\boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}\rangle. \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{\psi}A\mathbf{x}$ представляет собой произведение трех матриц, где $\boldsymbol{\psi}$ есть однострочная матрица длины n, A — квадратная матрица порядка n, $\mathbf{x}$ — одностолбцовая матрица высоты n, а скалярное произведение $\langle\boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}\rangle = \boldsymbol{\psi}\mathbf{u}$ есть произведение однострочной матрицы $\boldsymbol{\psi}$ на одностолбцовую матрицу $\mathbf{u}$.

Из формулы (8) следует, что функция $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})$ переменного $\mathbf{u}$ достигает своего максимума вместе с функцией $\langle\boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}\rangle$. Максимум функции $\langle\boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}\rangle$ переменного $\mathbf{u}$ при заданном $\boldsymbol{\psi}$ обозначим $P(\boldsymbol{\psi})$. Из условия C) следует, что величина $P(\boldsymbol{\psi})$ неотрицательна:

$$P(\boldsymbol{\psi}) \geqslant 0.$$

В силу принципа максимума (см. A)) оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ должно быть выбрано так, чтобы функция $H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u})$, как функция переменного $\mathbf{u}$, достигала своего максимума при $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. А это значит, что оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет условию

$$\langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t)\rangle = P(\boldsymbol{\psi}(t)). \tag{9}$$

D) Рассмотрим линейные системы уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{10}$$

и

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\psi}A. \tag{11}$$

Решения уравнений (10) и (11) тесно связаны между собой. Именно, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ есть решение уравнения (10), а $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(t)$ — решение уравнения (11), то скалярное произведение $\langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t)\rangle$ постоянно:

$$\langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t)\rangle = \boldsymbol{\psi}(t)\mathbf{x}(t) = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Для доказательства этого продифференцируем скалярное произведение $\langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t)\rangle$. В силу уравнений (10) и (11) получаем

$$\frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t)\rangle = \langle\dot{\boldsymbol{\psi}}(t), \mathbf{x}(t)\rangle + \langle\boldsymbol{\psi}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)\rangle = \\ = -\boldsymbol{\psi}(t)A\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\psi}(t)A\mathbf{x}(t) = 0.$$

Пусть

$$\mathbf{y}_i(t) = (y_i^1(t), \ldots, y_i^n(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{13}$$

— фундаментальная система решений уравнения (10), удовлетворяющая начальным условиям

$$y_i^j(t_0) = \delta_i^j,$$

а

$$\boldsymbol{\psi}^i(t) = (\psi_1^i(t), \ldots, \psi_n^i(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

— фундаментальная система решений уравнения (11), удовлетворяющая начальным условиям

$$\psi_j^i(t_0) = \delta_j^i.$$

Тогда мы имеем

$$\boldsymbol{\psi}^i(t)\mathbf{y}_j(t) = \delta_j^i \tag{14}$$

при произвольном t.

Действительно, при $t = t_0$ равенство (14) имеет место, а, следовательно, в силу соотношения (12) оно выполняется для произвольного t.

E) Решим уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}(t) \tag{15}$$

при помощи вариации постоянных, исходя из фундаментальной системы (13). Именно, пусть

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_\alpha(t)c^\alpha(t), \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

— решение уравнения (15). Подставляя это решение в уравнение (15), получаем

$$\mathbf{y}_\alpha(t)\dot{c}^\alpha(t) = \mathbf{u}(t).$$

Умножая это соотношение слева на $\boldsymbol{\psi}^j(t)$ (см. (14)), получаем

$$\dot{c}^j(t) = \psi_\alpha^j(t)u^\alpha(t).$$

Интегрируя это соотношение от t_0 до t, получаем

$$c^j(t) = c^j(t_0) + \int_{t_0}^{t} \psi_\alpha^j(\sigma) u^\alpha(\sigma) d\sigma,$$

откуда

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_\alpha(t)\left(x^\alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} \psi_\beta^\alpha(\sigma) u^\beta(\sigma) d\sigma\right).$$

F) Управление $\mathbf{u}(t)$ называется экстремальным, если оно удовлетворяет принципу максимума, т. е. если существует такое неравное нулю решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ уравнения (11), для которого выполняется условие

$$\langle \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}(t)\rangle = \boldsymbol{\psi}\mathbf{u}(t) = P(\boldsymbol{\psi}(t)). \tag{16}$$

Ясно, что всякое оптимальное управление является экстремальным.

Т е о р е м а 2. *Экстремальное управление $\mathbf{u}(t)$ для линейной задачи быстродействия (4), в которой множество допустимых управлений Ω представляет собой выпуклый многогранник, для которого выполнено условие B), представляет собой кусочно-постоянную функцию, значения которой равны вершинам многогранника Ω; более точно, экстремальное управление $\mathbf{u}(t)$, за исключением конечного числа значений t, однозначно определяется условием максимума как некоторая вершина многогранника Ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу F) значение управления $\mathbf{u}(t)$ определяется как величина $\mathbf{u}$, дающая максимум произведения $\langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}\rangle$ при $\mathbf{u} \in \Omega$ или, в виде формулы,

$$\langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}(t)\rangle = \max\langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}\rangle, \quad \mathbf{u} \in \Omega. \tag{17}$$

Если соотношение (17) не определяет $\mathbf{u}(t)$ как некоторую вершину многогранника Ω, то это значит, что при заданном значении t скалярное произведение $\langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}\rangle$ достигает своего максимума на некоторой грани Γ многогранника Ω. Если w^* есть некоторое ребро грани Γ, а $\mathbf{w}$ — вектор, имеющий направление этого ребра, то

$$\langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{w}\rangle = 0 \tag{18}$$

Действительно, если $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ — вершины многогранника Ω, образующие ребро w^*, то

$$\langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\rangle = \langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}_1\rangle - \langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{u}_2\rangle = 0.$$

Если формула (17) не определяет $\mathbf{u}(t)$ как вершину многогранника Ω для бесконечного множества значений t, то существует такой вектор $\mathbf{w}$, имеющий направление некоторого ребра w^* многогранника Ω, что равенство (18) имеет место для бесконечного множества значений t, расположенных на конечном отрезке переменного t.

Так как $\boldsymbol{\psi}(t)$ является решением линейной системы с постоянными коэффициентами, то $\langle\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{w}\rangle$ есть аналитическая функция t, и

$$\langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{w}\rangle = 0 \tag{19}$$

для целого интервала значений t, а потому соотношение (19) можно дифференцировать по t, и мы получаем последовательность равенств

$$\langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{w}\rangle = 0, \quad \langle\boldsymbol{\psi}(t)A, \mathbf{w}\rangle = 0, \quad \ldots, \quad \langle\boldsymbol{\psi}(t)A^{n-1}, \mathbf{w}\rangle = 0.$$

Так как в силу предположения B) векторы

$$\mathbf{w}, A\mathbf{w}, \ldots A^{n-1}\mathbf{w} \tag{20}$$

составляют базис пространства R^n, то оказывается, что вектор $\boldsymbol{\psi}(t)$ ортогонален каждому вектору базиса (20), т. е. любому вектору пространства R^n, а отсюда следует $\boldsymbol{\psi}(t) \equiv 0$, что противоречит предположению о том, что $\boldsymbol{\psi}(t)$ есть ненулевое решение уравнения (11).

Итак, доказательство теоремы 2 закончено.

G) Экстремальное управление $\mathbf{u}(t)$ для линейной задачи быстродействия (4), в которой многогранник Ω удовлетворяет условиям B), C), и переводящее точку $\mathbf{x}_0$ в начало координат $\mathbf{0}$ пространства R^n, единственно в той мере, в какой оно определяется равенством (16).

Докажем это утверждение. Выпишем прежде всего решение управляемой системы (15) для произвольного управления $u(t)$ (см. E)):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_\alpha(t)\left(x^\alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} \psi_\beta^\alpha(\sigma) u^\beta(\sigma) d\sigma\right).$$

Из этого равенства видно, что если начальное значение $\mathbf{x}(t_0)$ есть начало координат пространства R^n, то нулевое управление $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ не выводит из начала координат.

Допустим теперь, что существуют два экстремальных управления $\mathbf{u}_1(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $\mathbf{u}_2(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$, переводящих точку $\mathbf{x}_0$ в точку $\mathbf{0}$. Допустим для определенности, что $t_2 \geqslant t_1$. Доопределим управление $\mathbf{u}_1(t)$ на отрезок $t_1 < t \leqslant t_2$, положив

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t_1 < t \leqslant t_2.$$

Тогда управление $\mathbf{u}_1(t)$ определено на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ и переводит точку $\mathbf{x}_0$ в начало координат $\mathbf{0}$. Действительно, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$ является начальным условием для нулевого управления $\mathbf{u}_1(t) \equiv \mathbf{0}$ на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и, следовательно, не смещает начало координат.

Так как векторы $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ линейно независимы,

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{y}_\alpha(t_2)\left(x^\alpha(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_2} \psi^\alpha_\beta(\sigma) u_1^\beta(\sigma)\,d\sigma\right),$$

и

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{y}_\alpha(t_2)\left(x^\alpha(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_2} \psi^\alpha_\beta(\sigma) u_2^\beta(\sigma)\,d\sigma\right),$$

то мы имеем

$$x^i(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_2} \psi^i_\beta(\sigma) u_1^\beta(\sigma)\,d\sigma = x^i(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_2} \psi^i_\beta(\sigma) u_2^\beta(\sigma)\,d\sigma,$$

откуда

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \psi^i_\beta(\sigma) u_1^\beta(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_{t_0}^{t_2} \psi^i_\beta(\sigma) u_2^\beta(\sigma)\,d\sigma. \tag{21}$$

Пусть $\boldsymbol{\psi}^*(t)$ — то решение однородной системы (11), для которого управление $\mathbf{u}_2(t)$ удовлетворяет равенству (16), т. е.

$$\boldsymbol{\psi}^*(t)\mathbf{u}_2(t) = P(\boldsymbol{\psi}^*(t)).$$

Умножим соотношение (21) слева на $\boldsymbol{\psi}^*_i(t_0)$ и просуммируем по i. Тогда получим

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\psi}^*(\sigma)\mathbf{u}_1(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_{t_0}^{t_2} \boldsymbol{\psi}^*(\sigma)\mathbf{u}_2(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_{t_0}^{t_2} P(\boldsymbol{\psi}^*(\sigma))\,d\sigma. \tag{22}$$

Так как $P(\boldsymbol{\psi}^*(t)) > 0$, кроме, быть может, конечного числа точек t, то $t_1 = t_2$. Действительно, если $\mathbf{w}$ — направление некоторого ребра многогранника Ω, то так же, как в доказательстве теоремы 2, $\langle \boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{w}\rangle$ может равняться нулю только в конечном числе точек t. Далее, из равенства (22) получаем

$$\langle \boldsymbol{\psi}^*(t), \mathbf{u}_1(t)\rangle = P(\boldsymbol{\psi}^*(t)).$$

Таким образом, экстремальное управление $\mathbf{u}(t)$ единственно в той мере, в какой оно определяется равенством (16).

Глава 5. Синтез некоторых задач быстродействия

В этой главе мы рассмотрим применение принципа максимума к решению некоторых простых задач быстродействия. Из рассмотрения этих задач выяснится новая важная постановка задачи об оптимальных процессах — задача синтеза оптимальных управлений.

§10. Быстрейшая остановка движущейся по инерции точки в заданном месте. Пусть по прямой движется по инерции точка. Задача состоит в том, чтобы наискорейшим образом остановить движение этой точки в заданном месте прямой, которое мы примем за начало координат, применением к ней силы, ограниченной по модулю. В виде дифференциального уравнения движение точки описывается следующим образом:

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1.$$

В фазовых координатах

$$x^1 = x, \quad x^2 = \frac{dx}{dt}$$

это уравнение переписывается в виде следующей системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= u. \end{aligned} \tag{1}$$

Мы рассматриваем задачу быстродействия из заданного начального состояния $\mathbf{x}_0$ в конечное положение $\mathbf{x}_1$, которым служит начало координат: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Функция H в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = \psi_1 x^2 + \psi_2 u,$$

а матрица A записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, для вспомогательного вектора ψ мы получаем уравнение

$$\dot{\psi} = -\psi A,$$

или, в координатном виде,

$$\dot{\psi}_1 = 0,$$
$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1,$$

откуда $\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2 - c_1 t$ (c_1, c_2 — постоянные) Соотношение (9) главы 4 записывается тогда в виде

$$\psi_2 u = (c_2 - c_1 t)u = |c_2 - c_1 t|,$$

откуда получаем

$$u(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t) = \operatorname{sign}(c_2 - c_1 t). \qquad (2)$$

Из этого следует, что каждое оптимальное управление $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения ± 1 и имеющей не более двух интервалов постоянства (ибо линейная функция $c_2 - c_1 t$ не более одного раза меняет знак на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$). Обратно, любая такая функция $u(t)$ может быть получена из соотношения (2) при надлежащем выборе констант c_1, c_2.

Для отрезка времени, на котором $u = 1$, мы имеем (в силу системы (1))

$$x^2 = t + s^2,$$
$$x^1 = \frac{t^2}{2} + s^2 t + s^1 = \frac{1}{2}(t + s^2)^2 + \left(s^1 - \frac{(s^2)^2}{2}\right),$$

где s_1, s_2 — константы; отсюда получаем

$$x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 + s, \qquad (3)$$

где s — константа. Таким образом, кусок фазовой траектории, для которого $u \equiv 1$, представляет собой дугу параболы (3) (рис. 4,а).

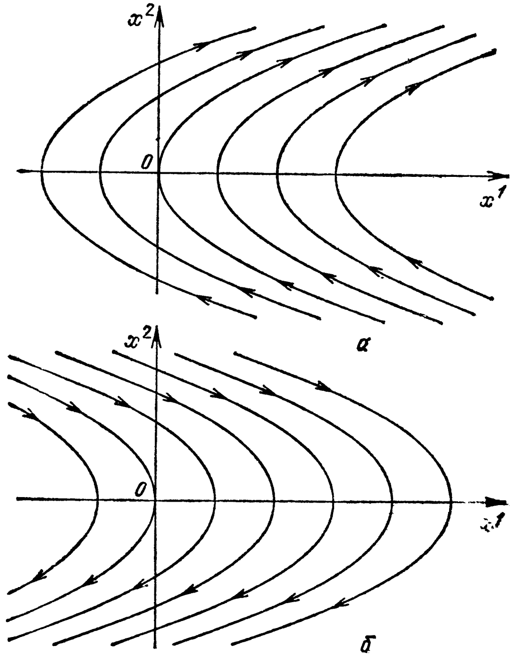

Рис. 4

Аналогично, для отрезка времени, на котором $u \equiv -1$, мы имеем

$$x^2 = -t + r^2,$$
$$x^1 = -\frac{t^2}{2} + r^2 t + r^1 = -\frac{1}{2}(-t + r^2)^2 + \left(r^1 + \frac{(r^2)^2}{2}\right)$$

(r^1, r^2 — константы), откуда получаем

$$x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + r, \qquad (4)$$

где r — константа (см. рис. 4, б). По параболам (3) фазовые точки движутся снизу вверх (ибо $\dfrac{dx^2}{dt} = u = +1$), а по параболам (4) — сверху вниз ($\dfrac{dx^2}{dt} = u = -1$).

Как было указано выше, каждое оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией t, принимающей значения ± 1 и имеющей не более двух интервалов постоянства. Если управление $u(t)$ сначала, в течение некоторого времени, равно $+1$, а

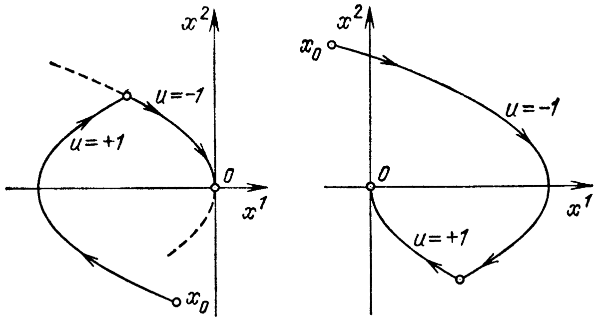

Рис. 5

затем равно -1, то фазовая траектория состоит из двух кусков парабол (рис. 5), примыкающих друг к другу, причем второй из этих кусков лежит на той из парабол (4), которая проходит через начало координат (ибо искомая траектория должна вести в начало координат). Если же, наоборот, сначала $u=-1$, а затем $u=+1$, то фазовая траектория заменяется центрально-симметричной (см. рис. 5). На рис. 5 написаны на дугах парабол соответствующие значения управляющего параметра u.

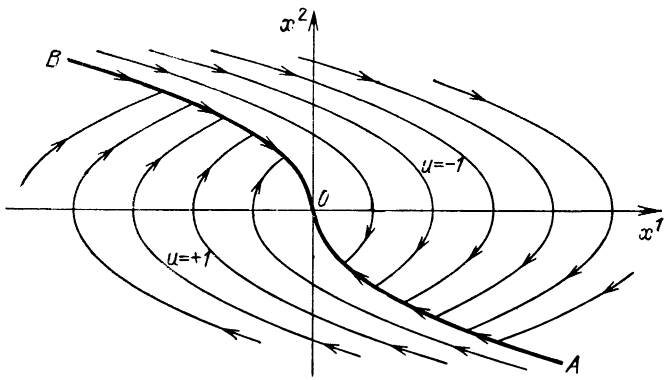

Рис. 6

На рис. 6 изображено все семейство полученных таким образом фазовых траекторий (AO — дуга параболы $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2$, расположенная в нижней полуплоскости; BO — дуга параболы $x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2$, расположенная в верхней полуплоскости). На плоскости чертежа (рис. 6) выделена линия переключения AOB. Выше этой линии управление $u=-1$, а ниже $u=+1$.

Если начальное положение $\mathbf{x}_0$ расположено выше линии AOB, то фазовая точка должна двигаться под воздействием управления $u=-1$ до тех пор, пока она не попадет на дугу AO; в момент попадания на дугу AO значение u переключается и становится равным $+1$ вплоть до момента попадания в начало координат. Если же начальное положение $\mathbf{x}_0$ расположено ниже линии AOB, то u должно быть равным $+1$ до момента попадания на дугу BO, а в момент попадания на дугу BO значение u переключается и становится равным -1.

Итак, согласно принципу максимума (см. теорему 1) только описанные траектории могут быть оптимальными. Из проведенного построения видно, что через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна траектория описанного вида. Из некоторых дополнительных соображений следует, что все полученные траектории оптимальны.

Полученное здесь решение задачи можно истолковать следующим образом. Обозначим $v(x^1,x^2)=v(\mathbf{x})$ функцию, заданную на плоскости x^1,x^2 следующим образом:

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & \text{ниже линии } AOB \text{ и на дуге } AO, \\ -1 & \text{выше линии } AOB \text{ и на дуге } BO. \end{cases}$$

Тогда на каждой оптимальной траектории значение $u(t)$ управляющего параметра (в произвольный момент t) равно $v(\mathbf{x}(t))$, т. е. равно значению функции v в точке $\mathbf{x}(t)$:

$$u(t) = v(\mathbf{x}(t)).$$

Это означает, что, заменив в системе (1) величину u функцией $v(\mathbf{x})$, мы получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= v(x^1,x^2), \end{aligned} \tag{5}$$

решение которой (при произвольном начальном состоянии $\mathbf{x}_0$) дает оптимальную фазовую траекторию, ведущую в начало координат. Иначе говоря, система (5) представляет собой систему дифференциальных уравнений (с разрывной правой частью) для нахождения оптимальных траекторий, ведущих в начало координат.

В данном случае мы получили возможность определить управление как функцию $v(\mathbf{x})$ точки $\mathbf{x}$ фазовой плоскости. Такое решение задачи называется синтезом оптимального управления.

§11. Быстрейшая остановка математического маятника ограниченной по модулю силой. В виде дифференциального уравнения сформулированная задача описывается следующим образом:

$$\ddot{x} + x = u, \quad |u| \leqslant 1.$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -x^1 + u, \end{aligned} \tag{6}$$

для которой мы, как и в предыдущем параграфе, изучим задачу о быстрейшем попадании в начало координат. Функция H здесь имеет вид

$$H = \psi_1 x^2 - \psi_2 x^1 + \psi_2 u,$$

а матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, для вспомогательного вектора $\boldsymbol{\psi}$ мы получаем уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\psi} A,$$

или, в координатном виде,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1, \end{aligned}$$

откуда $\psi_2 = a\sin(t - \alpha_0)$, где $a > 0$ и α_0 — некоторые постоянные. Условие максимума (см. (9) гл. 4) записывается в виде

$$\psi_2 u = a\sin(t - \alpha_0)u = |a\sin(t - \alpha_0)|,$$

откуда получаем

$$u(t) = \operatorname{sign}\psi_2(t) = \operatorname{sign}(a\sin(t - \alpha_0)) = \operatorname{sign}(\sin(t - \alpha_0)).$$

Отсюда следует, что управление $u(t)$ получается из функции $\operatorname{sign}(\sin t)$, равной поочередно $+1$ и -1 на интервалах длины π, при помощи сдвига на некоторый отрезок α_0 (рис. 7).

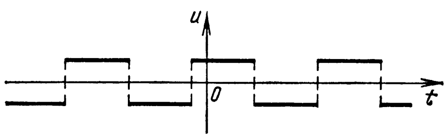

Рис. 7

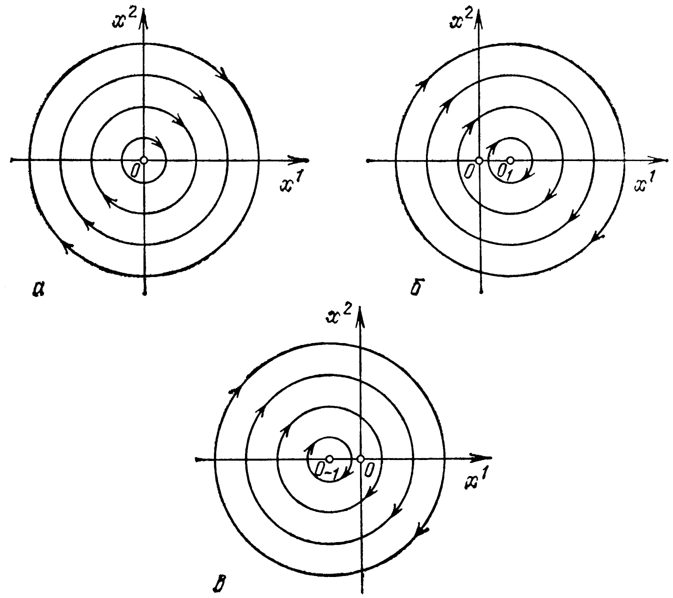

Рис. 8

Для изучения кусков траекторий, соответствующих значениям $u = \pm 1$, рассмотрим вспомогательную однородную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -x^1. \end{aligned} \tag{7}$$

Произвольное решение этой системы может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x^1 &= -r\cos(t + \gamma), \\ x^2 &= t\sin(t + \gamma), \end{aligned} \tag{8}$$

где r, γ — константы ($r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \gamma < 2\pi$). Таким образом, фазовыми траекториями системы (7) являются окружности с центром в начале координат:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2 \tag{9}$$

(рис. 8, а). Из (8) видно, что движение фазовой точки по окружности (9) совершается по часовой стрелке, причем равномерно, с линейной скоростью $2\pi r$ (один оборот за время 2π). Отметим, в частности, что за промежуток времени, имеющий длину π, фазовая точка, двигаясь по часовой стрелке, описывает половину окружности (9).

При $u = 1$ система (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -x^1 + 1, \end{aligned} \tag{10}$$

или, иначе,

$$\begin{aligned} \frac{d(x^1 - 1)}{dt} &= x^2, \\ \frac{dx^2}{dt} &= -(x^1 - 1). \end{aligned} \tag{11}$$

Вспоминая соотношения (7) и (9), находим, что фазовые траектории системы (11) (или, что то же самое, системы (10)) представляют собой окружности с центром в точке $(1, 0)$:

$$(x^1 - 1)^2 + (x^2)^2 = r^2. \tag{12}$$

Эти окружности фазовая точка, движущаяся по закону (10), пробегает по часовой стрелке, обходя за время π ровно половину окружности (см. рис. 8,б).

Аналогично при $u = -1$ система (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -x^1 - 1; \end{aligned}$$

ее фазовыми траекториями являются окружности

$$(x^1 + 1)^2 + (x^2)^2 = r^2$$

с центром в точке $(-1, 0)$. По этим окружностям фазовая точка движется по часовой стрелке, проходя ровно половину окружности за время π (см. рис. 8,в).

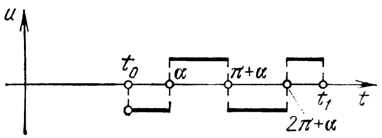

Рис. 9

Как было указано выше, каждое оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, получающейся из функции $\operatorname{sign}(\sin t)$, равной поочередно $+1$ и -1 на интервалах длины π, при помощи сдвига на некоторый отрезок α_0 (рис. 9). Если оптимальное управление $u(t)$ имеет вид, показанный на рис. 9, т. е. поочередно равно $+1$ и -1 на интервалах $(t_0, \alpha), (\alpha, \pi + \alpha), (\pi + \alpha, 2\pi + \alpha), \ldots$ и, в заключение, на некотором интервале длины $\beta < \pi$ равно $+1$, то соответствующая оптимальная траектория может быть построена следующим образом.

В течение заключительного отрезка времени длины β фазовая точка движется по окружности вида (12) (ибо $u = 1$ на этом отрезке времени), причем по той из этих окружностей, которая проходит через начало координат (ибо искомая траектория должна вести в начало координат). Такой окружностью является окружность радиуса 1 с центром в точке O_1 (рис. 10). По этой окружности фазовая точка попадает в начало координат, проходя дугу, меньшую половины окружности (ибо $\beta < \pi$). Таким образом, обозначив нижнюю полуокружность этой окружности через M_1O, мы найдем, что заключительный кусок оптимальной траектории представляет собой некоторую дугу AO полуокружности M_1O.

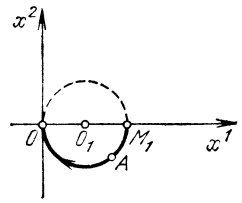

Рис. 10

Далее, в положение A фазовая точка попала, двигаясь в течение отрезка времени длины π под воздействием управления $u = -1$ (рис. 11), т. е. Предыдущий кусок фазовой траектории представляет собой полуокружность BA с центром в точке O_{-1}, заканчивающуюся в точке A (см. рис. 11). Так как дуга BA равна полуокружности, то точка B симметрична A относительно центра O_{-1}, и потому точка B лежит на полуокружности N_1N_2, симметричной полуокружности OM_1 относительно центра O_{-1}. Точно так же предшествующая дуге BA дуга CB, соответствующая отрезку времени длины π, на котором $u = 1$, есть полуокружность с центром O_1, и потому точка C лежит на полуокружности M_2M_3, которая симметрична полуокружности N_1N_2 относительно центра O_1 (рис. 12) и т. д. Таким образом, соответствующая фазовая траектория имеет вид, показанный на рис. 12 (начальный кусок фазовой траектории будет меньше половины окружности, если только $0 < \alpha - t_0 < \pi$; см. рис. 9).

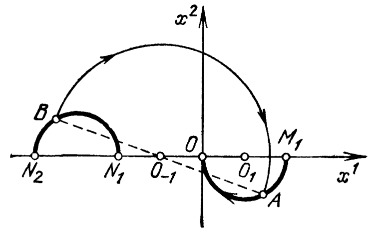

Рис. 11

Фазовая траектория, соответствующая оптимальному управлению $u(t)$, которое на заключительном отрезке длины β равно -1 (а не $+1$), получается из траектории, изображенной на рис. 12 с помощью центральной симметрии (рис. 13). Для такой траектории точки “стыка” окружностей будут лежать на полуокружностях $ON_1, M_1M_2, N_2N_3, \ldots$, симметричных (относительно начала координат) полуокружностям OM_1, N_1N_2, $M_2M_3, \ldots$

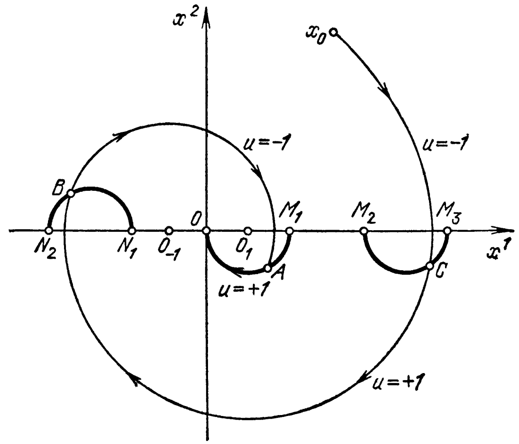

Рис. 12

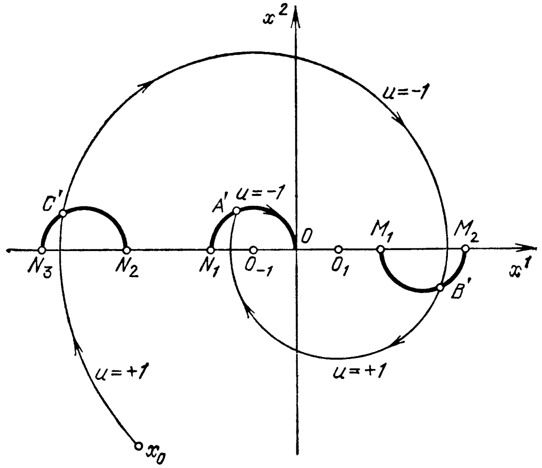

Рис. 13

Объединяя оба эти случая (см. рис. 12, 13), получаем всю картину поведения фазовых траекторий (рис. 14). На рис. 14 надписаны на дугах фазовых траекторий соответствующие значения управляющего параметра u. Из рис. 14 видно, что если начальная точка расположена выше линии $\ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\ldots$, составленной из бесконечного числа полуокружностей радиуса 1, то фазовая точка должна двигаться под воздействием управления $u=-1$ до тех пор, пока она не попадет на дугу $\ldots M_3M_2M_1O$; в момент попадания на эту дугу значение u переключается и остается равным $+1$ (фазовая точка при

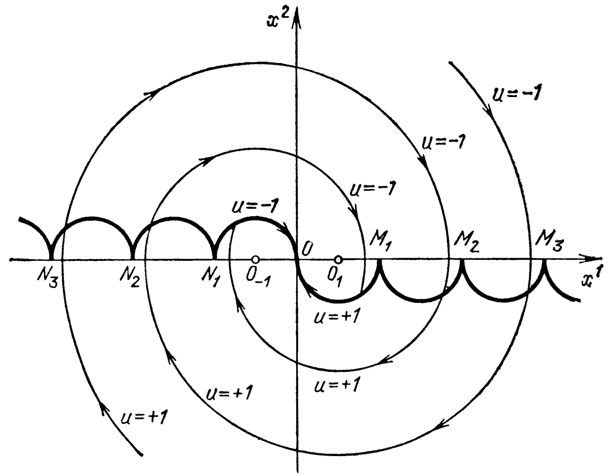

Рис. 14

этом движется ниже линии $\ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\ldots$) до момента попадания на дугу $ON_1N_2N_3\ldots$, затем точка снова движется выше линии $\ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\ldots$ под воздействием управления $u=-1$ и т. д. Последний кусок фазовой траектории (ведущий в начало координат) представляет собой дугу полуокружности M_1O или полуокружности N_1O. Совершенно аналогично движется точка и в том случае, если начальная точка x_0 расположена ниже линии $\ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\ldots$: выше этой линии фазовая точка движется под воздействием управления $u=-1$, а ниже этой линии — под воздействием управления $u=+1$.

Итак, согласно теореме 1 только указанные траектории могут быть оптимальными. Из проведенного построения видно, что через каждую точку плоскости проходит одна и только одна траектория описанного вида, ведущая в начале координат, которая может быть оптимальной. Из некоторых дополнительных соображений следует, что все описанные нами траектории оптимальны.

Как и в предыдущем §10, полученное решение задачи можно истолковать следующим образом. Обозначим через $v(x^1,x^2)=v(x)$ функцию, заданную на плоскости x^1,x^2 соотношениями

$$v(x)=\begin{cases} +1 & \text{ниже линии } \ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\ldots \text{ и на дуге } \ldots M_3M_2M_1O;\\ -1 & \text{выше линии } \ldots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3\ldots \text{ и на дуге } ON_1N_2N_3\ldots \end{cases}$$

Тогда вдоль каждой оптимальной траектории $x(t)$ соответствующее оптимальное управление $u(t)$ имеет вид

$$u(t)=v(x(t)).$$

Это, как и в §10, означает что, заменив в системе (6) величину u функцией $v(x)$, мы получим систему (с разрывной правой частью)

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -x^1 + v(x^1, x^2), \end{aligned} \tag{13}$$

решение которой (при произвольном начальном состоянии x_0) дает оптимальную в смысле быстродействия траекторию, ведущую в начало координат. Иначе говоря, системы (13) представляет собой систему дифференциальных уравнений (с разрывной правой частью) для нахождения оптимальных в смысле быстродействия траекторий, ведущих в начало координат.